Baccalauréat de l'enseignement du second degré

Session de juin 2018

MATHÉMATIQUES

Série : **D**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures** – COEFFICIENT : **4**

Cette correction comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6
La durée indiquée en début de chaque exercice tient compte du barème et est donnée à titre informatif pour bien gérer votre temps.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 1 **1 H30**

1. **a.** On développe l'expression :

$$(z-2)(z^2+2\sqrt{2}z+4) = z^3+2\sqrt{2}z^2+4z-2z^2-4\sqrt{2}z-8 = z^3+2(\sqrt{2}-1)z^2+4(1-\sqrt{2})z-8 = P(z)$$

b. Résolution de l'équation :

$$z^2+2\sqrt{2}z+4=0$$

C'est une équation de la forme :

$$az^2+bz+c=0$$

avec $a=1, b=2\sqrt{2}$ et $c=4$

On commence par calculer le discriminant :
$\Delta = b^2-4\times a\times c = (2\sqrt{2})^2-4\times 1\times 4 = 8-16=-8<0 \Rightarrow$ l'équation admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ et sont données par : $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

$\Rightarrow z_1 = \frac{-2\sqrt{2}+i\sqrt{-(-8)}}{2\times 1} = \frac{-2\sqrt{2}+i\sqrt{8}}{2} = \frac{-2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ et $z_2 = \frac{-2\sqrt{2}-i\sqrt{-(-8)}}{2\times 1} = -\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

$$\boxed{z_1 = -\sqrt{2}+i\sqrt{2} \text{ et } z_2 = -\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$$

c. Calcul de module et d'argument :
$|z_1| = |-\sqrt{2}+i\sqrt{2}| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$, $|z_2| = |z_1| = 2$ et $|Z| = |\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2}{2} = 1$

$$\boxed{|z_1| = 2, |z_2| = 2 \text{ et} |Z| = 1}$$

$\arg(z_1) : \begin{cases} \cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow arg(z_1) = \frac{3\pi}{4}$ $\qquad \arg(z_2) : \begin{cases} \cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow arg(z_2) = \frac{5\pi}{4}$

et $\arg(Z) = arg(\frac{z_1}{z_2}) = arg(z_1) - arg(z_2) = \frac{3\pi}{4} - \frac{5\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$

$$\boxed{arg(z_1) = \frac{3\pi}{4} arg(z_2) = \frac{5\pi}{4} \text{ et } arg(Z) = -\frac{\pi}{2}}$$

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

a. Transformation $f : z' = (\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})z$

i. La nature de f et éléments caractéristiques : $z' = (\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})z = e^{i\frac{\pi}{3}}z$

$\boxed{\text{f est donc une rotation de centre O (origine du plan complexe) et d'angle } \frac{\pi}{3}}$

ii. $a' = (\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})\times(\sqrt{3}+i) = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{3}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2} = 2i$

b. Transformation h :

i. L'homothétie de centre A' et de rapport $\frac{3}{2}$ est donnée par l'équation h :$z'-a' = \frac{3}{2}(z-a')$
$\Rightarrow z'-2i = \frac{3}{2}(z-2i) \Rightarrow z' = \frac{3}{2}z-i$
$\omega = \frac{3}{2}\times 0 - i = -i \Rightarrow \boxed{\omega = -i}$

ii. On détermine la mesure de l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{\Omega B}$ et $\overrightarrow{\Omega A}$. Cet angle est donné par l'argument

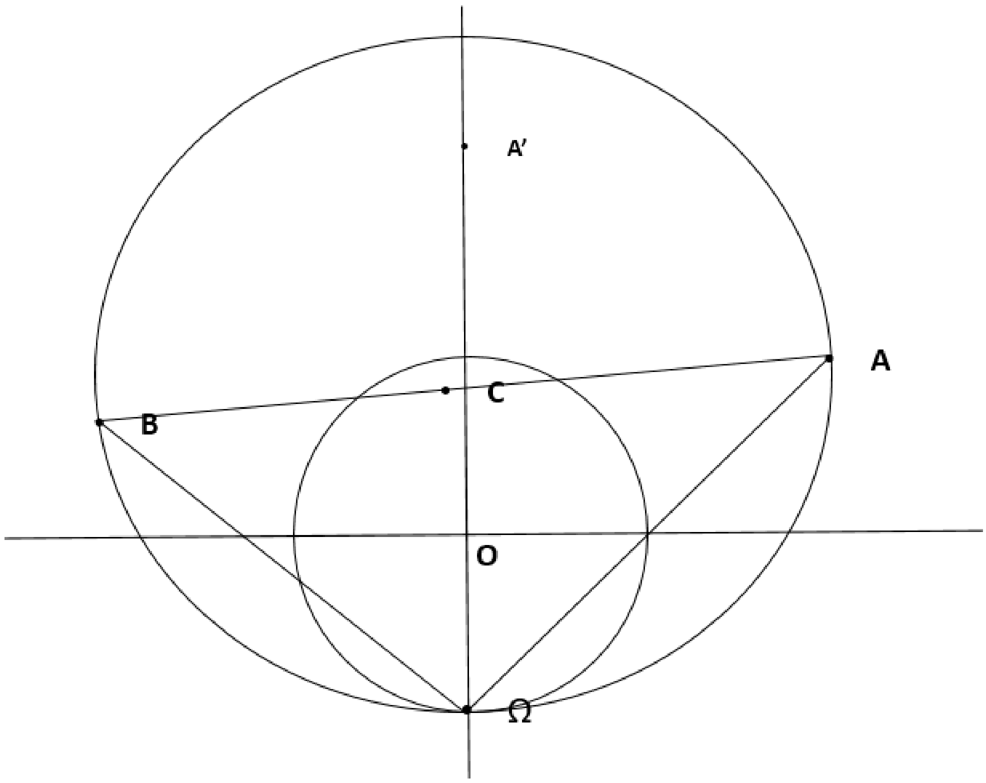
$$mes(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}) = arg(\frac{b-\omega}{a-\omega}) = arg(\frac{-2+i(\sqrt{3}-1)+i}{\sqrt{3}+i+i}) = arg(\frac{-2+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2i}) = arg(\frac{i(2i+\sqrt{3})}{\sqrt{3}+2i}) = arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow mes(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}) = \frac{\pi}{2}$. Autrement dit, le point B est l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$

$\boxed{\text{Donc les droites } (\Omega B) \text{ et } (\Omega A) \text{ sont perpendiculaires.}}$

iii. Comme $(\Omega B) \perp (\Omega A)$, Ω appartient au cercle de diamètre AB. Le centre du cercle est le point C milieu du segment [AB] d'affixe c= $\frac{z_A+z_B}{2} = \frac{\sqrt{3}+i-2+i(\sqrt{3}-1)}{2} = \frac{-2+\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{2} = (\frac{\sqrt{3}}{2}-1)+i\frac{\sqrt{3}}{2}$
Le rayon r du cercle $r = AC = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2}-1-\sqrt{3})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}-1)^2} = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2}+1)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}-1)^2} = \sqrt{\frac{7}{2}}$

$\boxed{\Omega\text{, A et B sont situés sur le cercle de centre C d'affixe c=}(\frac{\sqrt{3}}{2}-1)+i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et de rayon } r=\sqrt{\frac{7}{2}}}$



EXERCICE 2 **30MINUTES**

1. En notant Ω l'univers des possibles associés à ce jeu, on a Card(Ω)=$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!\times(10-4)!} = \frac{10\times9\times8\times7\times6!}{4!\times6!} = \frac{5040}{24} = 210$

$\boxed{\text{Card}(\Omega)=210}$

Autrement dit, Il y a 210 façons de tirer au hasard et simultanément 4 boules parmi 10.

2. Calcul de probabilités :
Notons que les multiples de 3 entre 1 et 10 sont 3,6 et 9. Ils sont donc au nombre de trois.

a. A l'évènement : « Obtenir un seul multiple de 3 »

$$\mathbb{P}(A) = \frac{C_3^1 \times C_7^3}{C_{10}^4}$$

b. B l'évènement : « Ne obtenir aucun multiple de 3 »

$$\mathbb{P}(B) = \frac{C_7^4}{C_{10}^4}$$

c. C l'évènement : « Obtenir deux multiples de 3 et deux seulement »

$$\mathbb{P}(C) = \frac{C_3^2 \times C_7^2}{C_{10}^4}$$

d. D l'évènement : « Obtenir au moins un nombre multiple de 3 »

$$\mathbb{P}(D) = 1 - \mathbb{P}(B) = 1 - \frac{C_7^4}{C_{10}^4}$$

PROBLÈME **2H00**

Partie A On considère la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $g(x) = (1-x)e^{1-x} - 1$

1. Limites de g aux bornes de son domaine de définition :

a. limite de g en $+\infty$
En faisant un premier changement de variable $X = 1 - x$, on a :
$\lim\limits_{x \to +\infty} (1-x)e^{1-x} = \lim\limits_{X \to -\infty} Xe^X$
Puis un deuxième changement de variable en posant y=-X donne :
$\lim\limits_{X \to -\infty} Xe^X = \lim\limits_{y \to +\infty} -ye^{-y} = -\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y} = -\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^y}{y}} = 0$ car le dénominateur tend vers $+\infty$ ($\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$)

Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} (1-x)e^{1-x} = 0$ et par conséquent $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0 - 1 = -1$.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = -1}$$

b. limite de g en $-\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (1-x)e^{1-x} - 1 = +\infty - 1 = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty}$$

2. Dérivée et tableau de variation

a. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est : $g'(x) = (-1) \times e^{1-x} - e^{1-x} \times (1-x) = -2e^{1-x} + xe^{1-x} = e^{1-x}(x-2)$

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^{1-x}(x-2)}$$

b. $g'(x) = e^{1-x}(x-2) = 0$. Comme $e^{1-x} > 0$ pour tout x ∈ $\mathbb{R}$ g'(x)=0 ⇔ $x = 2$
$g(2) = (1-2)e^{1-2} - 1 = -e^{-1} - 1 = -(\frac{1}{e} + 1)$

$pour tout x \in]-\infty, 2]\ \ g'(x) \leqslant 0\ \ et\ \ pour\ \ tout\ \ x \in]2, +\infty]\ \ g'(x) > 0$

x	-∞		2		+∞
g'(x)		-	0	+	
g(x)	+∞	↘	$-(\frac{1}{e} + 1)$	↗	-1

3. Solution de l'équation $g(x) = 0$

a. La fonction g est continue et décroissante sur l'intervalle]-∞,2] et de plus g change de signe sur cet intervalle car $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ et $g(2) < 0$

b. $g(0,4) = (1 - 0,4) \times e^{1-0,4} - 1 = 0,6 \times e^{0,6} - 1 = 0,093 > 0$
$g(0,5) = (1 - 0,5) \times e^{1-0,5} - 1 = 0,5 \times e^{0,5} - 1 = -0,175 < 0$
$g(0,4) < 0$ et $g(0,5) > 0$ donc $0,4 < \alpha < 0,5$

4. Signe de g :
   α est la solution de l'équation $g(x) = 0$, c'est-à-dire $g(\alpha) = 0$. Alors g change de signe de part et d'autre de α.

$$\boxed{\text{pour tout x} \in]-\infty, \alpha] \;\; g(x) \geqslant 0 \;\; et \;\; pour \;\; tout \;\; x \in]\alpha, +\infty] \;\; g(x) < 0}$$

Partie B On considère la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x) = xe^{1-x} - x + 2$

1. Limites de f :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{1-x} - x + 2 = \lim_{x\to+\infty} x(e^{1-x} - 1) + 2 = +\infty \times (0-1) + 2 = +\infty \times (-1) + 2 = -\infty + 2 = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{1-x} - x + 2 = \lim_{x\to-\infty} x(e^{1-x} - 1) + 2 = -\infty \times (+\infty - 1) + 2 = -\infty \times (+\infty) + 2 = -\infty + 2 = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$

2. **a.** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} - 1 = (1-x)e^{1-x} - 1$. On a alors $f'(x) = g(x)$ donc f est une primitive de g.

   b. Variations de f :
   $f'(x) = g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$. f' a le même signe que g :

   $pour tout x \in]-\infty, \alpha] \;\; f'(x) \geqslant 0 \;\; et \;\; pour \;\; tout \;\; x \in]\alpha, +\infty] \;\; f'(x) < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f(x)	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

3. **a.** On a vu que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. On montre ensuite que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b$
   $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (\frac{xe^{1-x} - x + 2}{x}) = \lim_{x\to+\infty} (e^{1-x} - 1 + \frac{2}{x}) = 0 - 1 + 0 = -1 = a$
   et $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty} (xe^{1-x} + 2) = 0 + 2 = 2 = b$

   Ainsi la droite $(D) : y = ax + b = -x + 2$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$

   b. La position relative de (D) par rapport à (C) dépend du signe de $f(x) - y$. $f(x) - y = xe^{1-x}$. Comme $e^{1-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - y$ a le meme signe que x. Alors $f(x) - y < 0$ sur $]-\infty, 0[$ et $f(x) - y > 0$ sur $]0, +\infty, [$. Donc (C) est en dessous de (D) sur $]0, +\infty, [$ et,(C) est au dessus de D sur $]0, +\infty, [$.

4. $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} (\frac{xe^{1-x} - x + 2}{x}) = \lim_{x\to-\infty} (e^{1-x} - 1 + \frac{2}{x}) = +\infty - 1 + 0 = +\infty$. (C) admet donc en $-\infty$ une branche parabolique de direction $(O, \overrightarrow{j})$

5. Équation de la tangente au point d'abscisse 1 : $(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = f'(1)(x-1) + f(1)$ or $f'(x) = g(x) = (x-2)e^{1-x}$ alors $f'(1) = (1-2)e^{1-1} = -1$, $f(1) = e^{1-1} - 1 + 2 = 2$ donc $(T) : y = -(x-1) + 2 = -x + 3$

$$\boxed{(T) : y = -x + 3}$$

6. Commençons déjà par remarquer que $f(x) + g(x) = e^{1-x} - x + 1$ alors $f(\alpha) + g(\alpha) = e^{1-\alpha} - \alpha + 1 = 1 - \alpha + e^{1-\alpha}$ comme $g(\alpha) = 0$, $f(\alpha) = 1 - \alpha + e^{1-\alpha}$. On fait une approximation pour parvenir au résultat demandé dans l'énoncé car $f(\alpha) \approx 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$

7. Soit $x \in \mathbb{R}$,
$f(-x+2) = (-x+2)e^{1-(-x+2)} - (-x+2) + 2 = (-x+2)e^{x-1} + x = e^{x-1}[(-x+2) + \frac{x}{e^{x-1}}] = e^{x-1}(-x+2+xe^{1-x}) = e^{x-1}f(x)$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(-x+2) = e^{x-1}f(x)}$$

8. Supposons que β est la première solution de l'équation $f(x) = 0$, alors d'après la question précédente (pour $x = \beta$) on a $f(-\beta+2) = e^{-\beta-1}f(\beta)$. Comme β est solution on $f(\beta) = 0$ et donc $f(-\beta+2) = e^{-\beta-1} \times 0 = 0$, $\Rightarrow f(-\beta+2) = 0$. Autrement dit $-\beta+2$ est l'autre solution de l'équation $f(x) = 0$.

9.